

Contents

1	Scopo	2
2	Passaggio al limite della SDF	2
3	Proprietà	3
3.1	linearita	3
3.2	dualita	3
3.3	variazione di scala	3
3.4	traslazione temporale	3
3.5	modulazione	3
3.6	prodotto/covoluzione	4
3.7	coniugo	4
3.8	Teorema di Derivazione	5
3.9	Teorema d'Integrazione	5
3.10	Crossrelazione	6
3.11	Autocorrelazione	8
4	Prontuario	9
5	Figure	10

1 Scopo

Permette, mediante il passaggio al limite, di estendere il concetto di approssimazione dei segnali con il metodo di Fourier anche a quelli non periodici.

[Download PDF](#)

2 Passaggio al limite della SDF

Sia $X_{T_0}(t) = x(t)rect(\frac{t-kT_0}{T_0})$ la troncata di un base del seguente treno d'impulsi (vds 1) definito come segue :

$$\begin{aligned} X_P(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{T_0}(t - kT_0) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)rect(\frac{1-kT_0}{T_0}) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k)e^{j2\pi\frac{k}{T_0}t} \end{aligned} \quad (1)$$

in cui :

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} X_P(t)e^{-j2\pi\frac{k}{T_0}t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)rect(\frac{t}{T_0})e^{-j2\pi\frac{k}{T_0}t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi\frac{k}{T_0}t} dt = f_0 F(kf_0) \end{aligned} \quad (2)$$

e dunque la SDF, riscritta in funzione di f_0 diventa :

$$X_P(t) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(kf_0)e^{j2\pi kf_0 t} \quad (3)$$

Applicando l'operazione di limite alla troncata base estendo la finestra all'intero segnale per cui :

- f_0 diventa d_f
- $kf_0 = kd_f = f$

- Σ diventa \int inteso come somma di Riemann.

per cui la 2 e la 3 diventano :

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (4)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi f t} df \quad (5)$$

che altro non è che la definizione di TDF e della sua inversa.

3 Proprietà

3.1 linearità

deriva dall'utilizzo dell'integrale nella definizione;

3.2 dualità

$$x(t) \rightarrow X(f) \rightarrow x(-t)$$

3.3 variazione di scala

$h(t) = x(at) \rightarrow H(f) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$ la variazione di scala influenza il modulo e non la fase di un segnale;

3.4 traslazione temporale

$$h(t) = x(t \pm t_0) \rightarrow H(f) = e^{\pm j2\pi f_0 t} X(f)$$

3.5 modulazione

$h(t) = x(t) e^{\pm j2\pi f_0 t} \rightarrow H(f) = X(f \mp f_0)$ La modulazione influisce sullo spettro della fase.

3.6 prodotto/covoluzione

$$h(f) * x(f) \rightarrow H(f)X(f)$$

$$h(f)x(f) \rightarrow H(f) * X(f)$$

3.7 coniugo

Un segnale reale o complesso ammette TDF formata da parte reale e immaginaria che però sotto opportune condizioni diventano mutuamente esclusive. In generale un segnale $x(t)$ ammette TDF del tipo $X(f) = \text{Re}\{X(f)\} + j\text{Im}\{X(f)\} = |X(f)|\cos(\theta) + j|X(f)|\sin(\theta)$ dove la parte reale è sempre simmetrica mentre quella immaginaria è sempre antisimmetrica.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^0 G(f)e^{j2\pi ft} df + G(0) + \int_0^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft} df = \\ &= G(0) - \int_0^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft} df + \int_0^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft} df = \\ &= G(0) - \int_0^{\infty} G(-f)e^{-j2\pi ft} df + \int_0^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft} df = \end{aligned} \quad (6)$$

Una dimostrazione delle proprietà sopra elencate la si ha osservando come un segnale $x(t)$ reale può essere rappresentato in forma trigonometrica utilizzando la sua TDF:

per cui

$$\begin{aligned} \text{con } G(f) \text{ pari} \Rightarrow x(t) &= G(0) + 2 \int_0^{\infty} G(f) \frac{[e^{j2\pi ft} + e^{-j2\pi ft}]}{2} df = \\ &= G(0) + 2 \int_0^{\infty} G(f) \cos(2\pi ft) df \\ \text{con } G(f) \text{ dispari} \Rightarrow x(t) &= G(0) + 2 \int_0^{\infty} G(f) \frac{[e^{j2\pi ft} - e^{-j2\pi ft}]}{2} df = \\ &= G(0) + 2j \int_0^{\infty} G(f) \sin(2\pi ft) df \end{aligned} \quad (7)$$

Nella fig. 2 un riepilogo dell'ultima parte della teoria.

3.8 Teorema di Derivazione

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \Rightarrow X(f) = (j2\pi f)^n X(f)$$

In pratica sia $x(t)$ un segnale reale e $x^1(t)$ la sua derivata prima e $x^2(t)$ la sua derivata seconda allora se non riesco a calcolare la TDF di $x(t)$ posso derivare fino a quando non ottengo una funzione, nel nostro caso $x^2(t)$, di cui so calcolare la derivata allora :

$$x(t) \Rightarrow x^1(t) \quad (8)$$

Nella fig. 3 un esempio applicativo del teorema

3.9 Teorema d'Integrazione

Sia $x(t) = \int_{-\infty}^t g(\alpha) d\alpha$ come mostra il grafico seguente

per cui

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t g(\alpha) d\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) u(t - \alpha) d\alpha = g(t) * u(t) \end{aligned} \quad (9)$$

la cui TDF è

$$\begin{aligned} X(f) &= G(f)U(f) = G(f)\left[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(t)}{2}\right] = \\ &= \frac{G(f)}{j2\pi f} + G(f)\frac{\delta(t)}{2} = \\ &= \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{G(0)}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

per cui se nel dominio del tempo vale sempre la seguente relazione

$$x(t) = \int x'(t) dt \Rightarrow X(f) = \frac{X'(f)}{j2\pi f} + \frac{X'(0)}{2}$$

nel dominio della frequenza si ha che

$X(f) = \frac{X'(f)}{j2\pi f}$ vale solo se $X'(0) = 0$ cioè per segnali privi di componente continua (segnali ad energia finita).

3.10 Crossrelazione

Misura la somiglianza di due segnali. Si definisce come :

$$\begin{aligned} C_{12}(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t + \alpha) x_2^c(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2^c(t - \alpha) dt \end{aligned} \quad (11)$$

da cui

$$F[C(\alpha)] = X_1(f) X_2^c(f) = S_{12}(f)$$

in cui α rappresenta la finestra di covoluzione.

Nel caso in cui $x(t)$ sia un segnale allora :

- $S_{12}(f)$ rappresenta lo spettro di **energia mutua** o **densità spettrale di energia mutua**;
- dalla proprietà che afferma che :

$$x^c(t) \rightarrow X^c(-f) \text{ e } x^c(-t) \rightarrow X^c(f);$$

si ottiene $S_{12}(f) = S_{21}^c(f)$ che nel caso di segnali reali si trasforma in $S_{12}(f) = S_{21}(-f)$, inoltre per segnali reali si ha che $S_{12}(f) S_{21}^c(f) = G_1(f) G_2^c(f) G_2(f) G_1^c(f) = |G_1(f)|^2 |G_2(f)|^2$;

Valutazione della crossrelazione in funzione di $\alpha = 0$ ottenuta applicando a $X_2^c(f)$ la proprietà $x^c(t) \rightarrow X^c(-f)$:

$$\begin{aligned} C_{12}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2^c(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}[X_1(f) X_2^c(-f)] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f) e^{j2\pi ft} X_2^c(-f) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f) X_2^c(-f) df \end{aligned} \quad (12)$$

che altro non è che il **Teo di Parseval**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2^c(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f) X_2^c(-f) df \quad (13)$$

Inoltre quando $C_{12}(0) = 0$ si parla di **segnali ortogonali**. Se invece $C_{12}(0) \neq 0$ si dice che due segnali sono **segnali paralleli**.

Per la giustificazione di quanto sopra basta ricordare che :

$$\begin{aligned} |C_{12}(0)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2^c(t) dt \right|^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|^2 |x_2^c(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (14)$$

e che ogni $\int_{-\infty}^{\infty} \dots dt$ può essere visto come un vettore complesso di componenti $x = a + jb$.

- Nel caso $C_{12}(0) = 0$

$$\begin{aligned} |C_{12}(0)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2^c(t) dt \right|^2 = \\ |(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2)|^2 &= |a_1 a_2 + ja_1 b_2 + ja_2 b_1 - b_1 b_2|^2 = \\ |(a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)|^2 &= \\ (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

da cui

$$[(a_1 a_2 - b_1 b_2), (a_1 b_2 + a_2 b_1)] = [0, 0]$$

l'unica combinazione possibile è che i due vettori siano perpendicolari.

- Nel caso $C_{12}(0) \neq 0$

$$\begin{aligned} |C_{12}(0)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2^c(t) dt \right|^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |x_2^c(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (16)$$

sviluppando separatamente ambo i membri si ottiene

$$\begin{aligned} a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 &= \\ a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 & \end{aligned} \quad (17)$$

l'unica combinazione possibile è che i due vettori siano paralleli.

Valutazione della crossrelazione in funzione di $\alpha \neq 0$:

- Nel caso $C_{12}(\alpha) = 0$ i segnali sono incorrelati.

TEO: **CNS affinché due segnali siano incorrelati è che $G_1(f)G_2^c(f) = 0$**

- Nel caso $C_{12}(\alpha) \neq 0$ misura del grado di somiglianza;

3.11 Autocorrelazione

Misura la velocità di variazione di un segnale e si definisce come :

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t + \alpha)x_1^c(\alpha)d_t \Rightarrow F[A(\alpha)] = S(f) = X_1(f)X_1^c(-f) = |X_1(f)|^2 \quad (18)$$

in cui α rappresenta la finestra di covoluzione e $S(f)$ è la **la densità spettrale di energia**.

- Nel caso in cui $\alpha = 0$ si ottiene il teo dell'energia :
 - Inoltre se $A(0) = 0$ non è interessante;
 - Nel caso in cui $A(0) \neq 0$:

$$A(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_1^c(t)d_t = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|^2 d_t = E \quad (19)$$

Dalla formula d'inversione della TDF si ha che :

$$\begin{aligned} A(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_1^c(t)d_t = \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}[S_1(f)S_1^c(-f)]df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f)e^{j2\pi ft}S_1^c(f)e^{-j2\pi ft}d_t = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f)S_1^c(-f)df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |S_1(f)|^2 df \end{aligned} \quad (20)$$

che altro non è che l'**uguaglianza di Parseval**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|^2 d_t = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad (21)$$

- Nel caso $\alpha \neq 0$ abbiamo le seguenti possibilità :
 - $A(0) = 0$ non interessante;

- SE $x(t)$ È COMPLESSO $\Rightarrow A(\alpha) = A^C(-\alpha)$ SIMMETRIA HERMITIANA
- SE $x(t)$ È REALE $\Rightarrow A(\alpha) = A(-\alpha)$ SIMMETRIA REALE
- Infine si ha che $|A(\alpha)| \leq A(0)$

4 Prontuario

funzione	traformata
1	$\delta(t)$
$\delta(t)$	1
c	$c\delta(t)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{i2\pi f}$
$u(t)$	$\frac{1}{i2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}$
$\text{rect}(t)$	$\text{sinc}(t)$ con $f = 0$ allora $\text{sinc}(f) = 1$
$\frac{1}{t^n}$	$(-i)^n \text{sgn}(f) \frac{\pi(2\pi f)^{n-1}}{(n-1)!}$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)}{2i}$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2i}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{(i2\pi f)^{n+1}} + \frac{\delta(f) \cdot n!}{2(i2\pi f)^n}$
$\sin(2\pi f_0 t) u(t)$	$\frac{f_0}{2\pi(f_0^2 - f^2)} + \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{4i}$
$\cos(2\pi f_0 t) u(t)$	$\frac{f_0}{2\pi(f_0^2 - f^2)} + \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{4}$
$e^{at} u(t)$	$\frac{1}{a + i2\pi f}$
$t e^{at} u(t)$	$\frac{1}{(a + i2\pi f)^2}$
$\sin(2\pi f_0 t) u(t) e^{-at}$	$\frac{2\pi f_0}{(a + i2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$\cos(2\pi f_0 t) u(t) e^{-at}$	$\frac{a + i2\pi f}{(a + i2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$\sinh(2\pi f_0)$	$\frac{1}{2} [\delta(f + if_0) - \delta(f - if_0)]$
$\cosh(2\pi f_0)$	$\frac{1}{2} [\delta(f + if_0) + \delta(f - if_0)]$

5 Figure

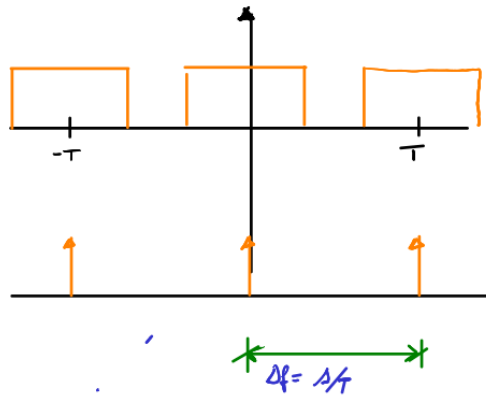


Figure 1: grafico del treno d'impulsi

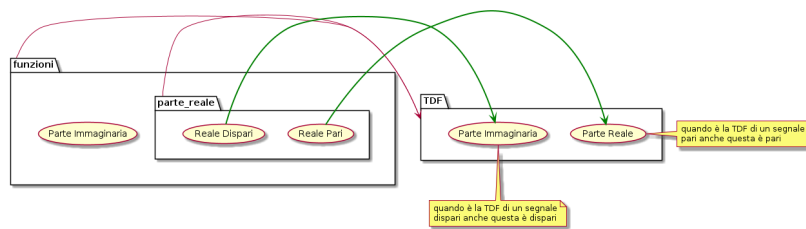


Figure 2: riepilogo della prop. del coniugo

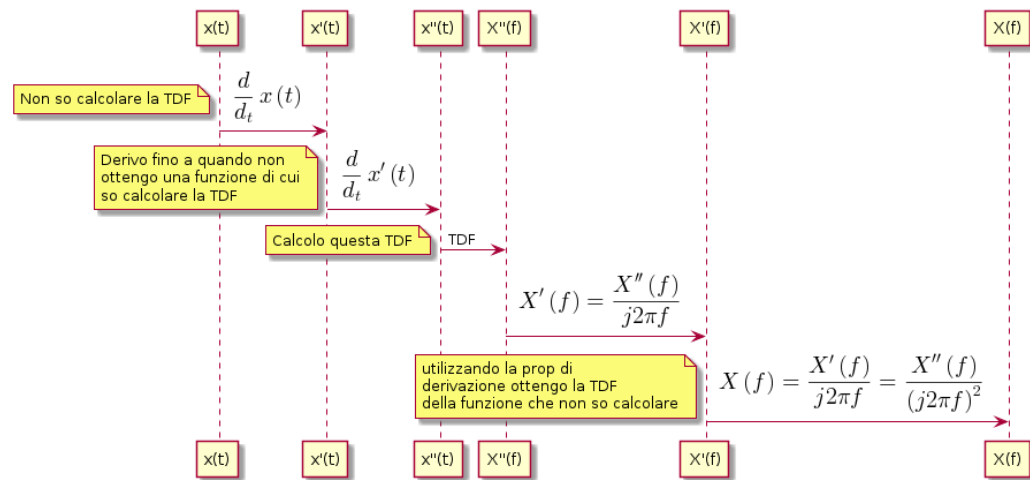


Figure 3: riepilogo della prop. della derivata