

## Contents

<b>1</b>	<b>Scopo</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Funzionale</b>	<b>2</b>
2.1	Proprietà . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Distribuzione</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Delta di Dirac <math>\delta(t)</math></b>	<b>2</b>
4.1	Giustificazione dell' esistenza . . . . .	3
<b>5</b>	<b>Proprietà</b>	<b>3</b>
5.1	proprietà campionatrice . . . . .	3
5.2	Simmetria . . . . .	3
5.3	covoluzione . . . . .	3
5.4	Moltiplicazione per uno scalare . . . . .	3
<b>6</b>	<b>Limite nel senso delle distribuzioni</b>	<b>4</b>
<b>7</b>	<b>derivata distribuzionale</b>	<b>4</b>
7.1	Esempio . . . . .	4
<b>8</b>	<b>TDF della delta di DIRAC</b>	<b>4</b>
8.1	Definizione . . . . .	4
8.2	Covoluzione . . . . .	4
8.3	TDF di un segnale complesso . . . . .	4
8.4	TDF di $u(t)$ . . . . .	6
<b>9</b>	<b>TDF di un segnale periodico</b>	<b>6</b>
<b>10</b>	<b>Pettine di DIRAC</b>	<b>8</b>

## 1 Scopo

Permette di estendere il concetto di TDF anche a segnali con discontinuità oppure a segnali periodici rappresentabili con la TDF come ad esempio i segnali ad energia infinita quali, ad esempio, quelli con componente continua.

## 2 Funzionale

Cambio di paradigma sul significato dell'integrale non più come somma di Reiman ma come funzione che associa ad ogni suo valore del suo argomento ( funzione ) uno scalare. Un funzionale è definito come segue :

$$I_{\phi}(f) = \int f(t)\phi(t)dt$$

in cui  $\phi(t)$  è una funzione di test a supporto compatto, cioè  $\phi(t) \in C^\infty$  e diversa da 0 solo in  $[a, b]$  che dà significato all'integrale. Ad esempio se  $\phi(t) = 1$  allora  $I_\phi$  è l'area dell'integrale.

### 2.1 Proprietà

- **linearità** : ereditata dall'integrale;
- **continuità** :  $\phi(t)$  è continua e se lo è anche  $f(t)$  cioè  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t + \epsilon) = f(t)$ , allora:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int f(t + \epsilon)\phi(t)dt &= \\ \int \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t + \epsilon)\phi(t)dt &= \\ \int f(t)\phi(t)dt & \end{aligned} \tag{1}$$

## 3 Distribuzione

Quando un funzionale è lineare e continuo allora è una distribuzione.

## 4 Delta di Dirac $\delta(t)$

E' quella funzione t.c. il suo funzionale per qualunque funzione di test risulta  $\phi(0) = \int \delta(t)\phi(t)dt$

## 4.1 Giustificazione dell' esistenza

Si consideri la seguente situazione

in cui  $u_\epsilon(t)$  è continua su tutto  $\mathbb{R}$  cioè  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(t) = u(t)$ . Dunque  $u_\epsilon(t)$  ammette derivata  $\delta_\epsilon(t)$  la quale però non è continua nell'intervallo  $]-\infty, \infty[$ .

E' è però lecito scrivere

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) = \text{funzione di base nulla e altezza infinita}$

che chiameremo  $\delta(t)$  e che è definita solo in 0. Inoltre è possibile scrivere

:

$$u(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \delta_\epsilon d_t = \int \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(t) d_t = \int \delta(t) d_t$$

da cui si ricava che il **significato funzionale** è che  $\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$ .

Inoltre partendo dall'osservazione che :

- l'area sottesa a  $\delta_\epsilon(t)$  è sempre 1  $\forall \epsilon$ ;
- $\int \delta(t) d_t = \int \delta(t) 1 d_t = \int \delta(t) \phi(t) d_t = \phi(0)$  che altro non è la definizione di delta di D.;

allora essendo  $\phi(t) = 1$  il funzionale rappresenta l'area sottesa a  $\delta(t)$  che essendo ottenuta come limite di  $\delta_\epsilon(t)$  la cui area è costantemente 1 allora  $\int \delta(t) d_t = 1$  che è il **significato analitico** .

## 5 Proprietà

### 5.1 proprietà campionatrice

La relazione  $\int \delta(t) \phi(t) d_t = \phi(0)$  è conosciuta come la **proprietà campionatrice** della delta di Dirac. Infatti  $\int \delta(t) f(t) d_t = \int \delta(0) f(0) d_t = f(0)$  in quanto la delta di D. è definita solo in 0.

### 5.2 Simmetria

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

### 5.3 covoluzione

$$g(t) * \delta(t) = \int g(t) \delta(t - \alpha) d_t = g(\alpha)$$

### 5.4 Moltiplicazione per uno scalare

$$\int A \delta(t) d_t = A$$

## 6 Limite nel senso delle distribuzioni

## 7 derivata distribuzionale

Per comprendere il significato della derivata distribuzionale ci si basa sulla proprietà della derivazione del prodotto di funzioni:

$$\frac{d}{dt} f(t)\phi(t) = f'(t)\phi(t) + f(t)\phi'(t)$$

$$\int f'(t)\phi(t)dt = [f(t)\phi(t)]_{t=-\infty}^{t=\infty} - \int f(t)\phi'(t)dt$$

$$\int f'(t)\phi(t)dt = - \int f(t)\phi'(t)dt$$

(2)

in cui  $[f(t)\phi(t)]_{t=-\infty}^{t=\infty} = 0$  in quanto  $\phi(t)$  è a supporto compatto, inoltre essendo  $\phi(t)$  una funzione di test che scelgo in modo arbitrario ne conosco la derivata per cui in conseguenza conosco la derivata della distribuzione.

### 7.1 Esempio

## 8 TDF della delta di DIRAC

### 8.1 Definizione

Dalla definizione di TDF si ricava quella per la delta di D. che

$$\delta(f) = \int \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = 1 \text{ in quanto } \delta(t) \neq 0 \text{ solo in } 0.$$

### 8.2 Covoluzione

per la proprietà covolutiva della TDF si ha che

$$g(t)*\delta(t - t_0) \Rightarrow G(f)\delta(f - f_0) = G(f - f_0)$$

in quanto la delta di D. è non nulla solo in  $(f - f_0)$  proprietà di campionamento della delta di D. .

### 8.3 TDF di un segnale complesso

Senza l'introduzione della delta di D. questa TDF non avrebbe senso in quanto l'energia di  $g(t)$  è infinita.

$$g(t) = e^{j2\pi f_0 t} = 1e^{j2\pi f_0 t} \Rightarrow G(f) = \delta(f - f_0)$$

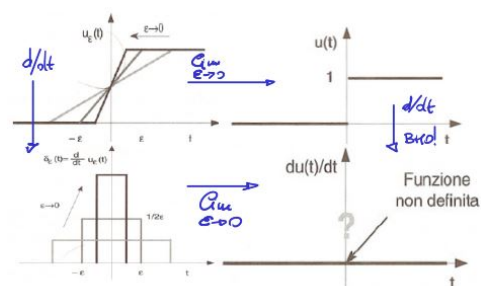


Figure 1: Giustificazione dell'esistenza della  $\delta(t)$

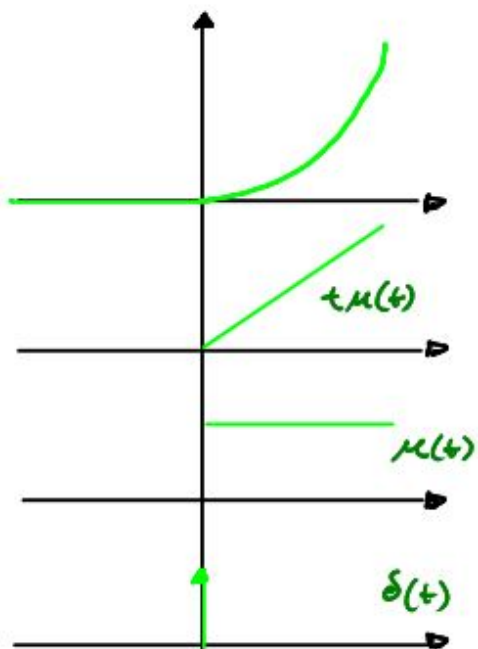


Figure 2: riepilogo della prop. della derivata

- esempio :

$$\text{TDF di } g(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

$$g(t) \Rightarrow G(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$$

#### 8.4 TDF di u(t)

- TDF della funzione  $g(t) = e^{-bt}$  per  $t \geq 0$
- TDF della funzione  $\text{sgn}(t)$  intesa come limite per  $b \rightarrow 0$  della funzione  $e^{-bt}$  estesa all'infinito
- TDF di  $u(t)$  intesa come traslazione verticale della funzione  $\text{sgn}(t)$

### 9 TDF di un segnale periodico

Sia  $X_T(t) = \text{rect}(\frac{t}{T_0})x(t)$  la troncata al periodo base di un segnale periodico  $x(t)$  e sia

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} X_T(t - nT_0) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} G(n)e^{j2\pi \frac{n}{T_0}t} \end{aligned} \quad (3)$$

la ridefinizione del segnale periodico in cui l'ultima uguaglianza si ricava dalla definizione della SDF in cui

$$\begin{aligned} G(n) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0}t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{rect}(\frac{t}{T_0}) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0}t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0}t} dt \end{aligned} \quad (4)$$

per la definizione di TDF di un segnale periodico si rende necessario :

1. Riscrittura di  $G(n)$  in funzione della sostituzione  $f_0 = \frac{1}{T_0}$
2. riscrittura della SDF con il nuovo coefficiente

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad g(t) = \frac{1}{2}t^2 \mu(t)$$

$$\begin{aligned} \int g'(t) \phi(t) dt &= \left. g(t) \phi(t) \right|_{-\infty}^{\infty} - \int g(t) \phi'(t) dt = \\ &= \underbrace{\left. \frac{1}{2}t^2 \mu(t) \phi(t) \right|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int g(t) \phi'(t) dt = \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{1}{2}t^2 \mu(t) \phi'(t) dt \\ &= \underbrace{\left. \frac{1}{2}t^2 \phi(t) \right|_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} t \mu(t) \phi(t) dt \end{aligned}$$

a) Funzione exp.

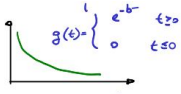
$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt} e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-(j2\pi f + b)t} dt = \left. \frac{1}{-(j2\pi f + b)} e^{-(j2\pi f + b)t} \right|_0^{\infty} = \boxed{-\frac{1}{j2\pi f + b}}$$


Figure 3: funzione  $e^{-bt}$  e sua TDF

Funzione sgn

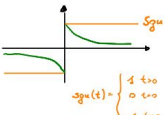
$$\begin{aligned} G(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{bt} e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^0 -e^{-bt} e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(j2\pi f + b)t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{-(j2\pi f - b)t} dt = \\ &= \dots = \frac{1}{b + j2\pi f} - \frac{1}{b - j2\pi f} = -\frac{j2\pi f}{b^2 + 4\pi^2 f^2} \Rightarrow \lim_{b \rightarrow 0} G(f) = -j \frac{1}{2\pi f} = \boxed{\frac{1}{j2\pi f}} \end{aligned}$$


Figure 4: funzione  $sgn(t)$  e sua TDF

Funzione  $\mu(t)$

$$U(f) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{j2\pi f} + S(f) \right]$$

osservate applicando la formula di Parseval a  $u(t)$  e  $S(f)$  per la prop. scelta 5

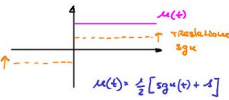


Figure 5: funzione  $u(t)$  e sua TDF

### 3. TDF dell'argomento della SDF

per cui

$$\begin{aligned} G(n) &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt = \\ f_0 \int_{T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt &= f_0 G(n f_0) \end{aligned} \quad (5)$$

dal'ultima relazione possiamo scrivere

$$X_p(t) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} G(f) e^{j2\pi n f_0 t}$$

per cui applicando la TDF alla serie si ottiene

$$X_p(t) \Rightarrow X_p(f) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} G(f) \delta(f - n f_0)$$

## 10 Pettine di DIRAC

Sia

$$\delta_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(n) e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t}$$

e in analogia con la 4 si ridefinisce il coeficiente della SDF in funzione della frequenza per cui

$$\begin{aligned} \delta(n) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt = \\ \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt &= \\ \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt &= \\ f_0 \int_{T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt &= f_0 \end{aligned} \quad (6)$$



e dunque la SDF diventa

$$\delta_p(t) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} 1e^{j2\pi n f_0 t} \quad (7)$$

la cui TDF, per la definizione di TDF di funzione periodica diventa :

$$\delta_p(t) \Rightarrow \delta_p(f) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(f - n f_0) \quad (8)$$

L'immagine nel seguito mostra la rappresentazione del pettine di Dirac

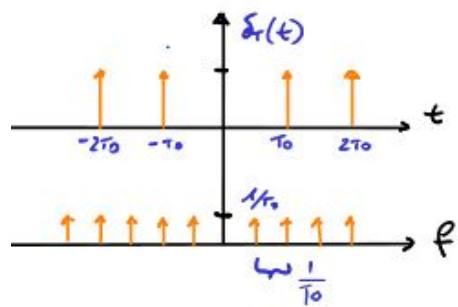


Figure 6: Pettine di Dirac