

Contents

1	Definizione	2
2	Operazioni tra sequenze	2
3	TDF per sequenze	3
3.1	Trasformazione mediante riscrittura con l'utilizzo di SDF . . .	4
3.2	uso della covoluzione tra le TDF del segnale campionario e di quello continuo	5
3.3	trasformo direttamente $x_c(f)$ in quanto funzione continua . . .	5
3.4	Normalizzazione delle TDF	5
3.5	Convergenza della TDF	6
3.6	Inversione della TDF di una sequenza	7
4	Proprietà della TDF per sequenze	8
5	Download	9

1 Definizione

2 Operazioni tra sequenze

- **Somma** $w[n] = x[n] + y[n]$
- **Prodotto** $w[n] = x[n]y[n]$
- **Convoluzione** $w[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$
- **Traslazione** $w[n] = x[n - n_0]$
- **Inversione** $w[n] = x[-n]$
- **Impulso discreto** analogo della $\delta(t)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{con } n = 0 \\ 0 & \text{con } n \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

per vale il seguente teorema

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (2)$$

- **Gradino unitario**

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (3)$$

altre relazioni utili

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] \quad (4)$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad (5)$$

• **Esponenziale** $x[n] = a^n$

• **Sequenza sinusoidale**

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\omega_0 n + \phi} + \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 n + \phi}$$

$$\text{con } x[n] = x[n+N] \text{ con } \omega_0 N = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3 TDF per sequenze

Sia

$$x_c(t) = p(t)x(t) \quad (6)$$

una funzione continua ottenuta da un insieme discreto di valori, campioni, ottenuti applicando la seguente funzione di campionamento $p(t)$ al segnale continuo $x(t)$:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (7)$$

per cui la 6 diventa

$$x_c(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right) x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) x(t) \quad (8)$$

La covoluzione precedente permette di ottenere i soli valori utili del segnale continuo ipò $x(nT)$ per cui la 8 diventa

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT) \quad (9)$$

Per il calcolo della TDF si possono utilizzare i seguenti tre metodi :

- riscrivo $x_c(t)$ come SDF;
- utilizzo la covoluzione tra le TDF del segnale campionario e di quello continuo;
- trasformo direttamente $x_c(f)$ in quanto funzione continua;

3.1 Trasformazione mediante riscrittura con l'utilizzo di SDF

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi(n/T)t} \quad (10)$$

con

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{n=-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j2\pi(n/T)t} dt = \frac{1}{T} \quad (11)$$

per cui la 10 diventa :

$$p(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(n/T)t} \quad (12)$$

per cui la 9 diventa

$$x_c(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{j2\pi(n/T)t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j2\pi(n/T)t} \quad (13)$$

per cui trasformando la 13 con la seguente sostituzione di variabile $f_c = \frac{1}{T}$

$$X_c(f) = f_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_c) \quad (14)$$

3.2 uso della covoluzione tra le TDF del segnale campionario e di quello continuo

Sulla base del risultato precedente si può scrivere

$$X_c(f) = X(f) * P(f) \quad (15)$$

con $P(f)$ ottenuta trasformando la 12

$$P(f) = f_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_c) \quad (16)$$

per cui la 15 diventa

$$\begin{aligned} X_c(f) &= \int X(f) P(f - \theta) d_f = \int X(\theta) f_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_c - \theta) d_\theta = \\ &= f_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int X(\theta) \delta(f - nf_c - \theta) d_\theta = f_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_c) \end{aligned} \quad (17)$$

3.3 trasformato direttamente $x_c(f)$ in quanto funzione continua

Trasformato direttamente la 9

$$\begin{aligned} X_c(f) &= \int x_c(f) e^{-j2\pi ft} dt = \int \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int \delta(t - nT) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} \end{aligned} \quad (18)$$

3.4 Normalizzazione delle TDF

Applicando la seguente sostituzione di variabile

1. $F = fT = \frac{f}{f_c}$ da cui $f = F f_c$: rende il periodo della funzione $X(F)$ unitario con $F \in [-0.5, 0.5]$;
2. $\omega = 2\pi F = 2\pi \frac{f}{f_c}$: rende il periodo della funzione $X(F)$ di periodo 2π con $\omega \in [-\pi, \pi]$;

ottengo le seguenti serie di potenze .

- alla 18 ottengo

$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n F} \quad (19)$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega} \quad (20)$$

- alla 17 e alla 14 ottengo

$$X_c(F f_c) = f_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(F f_c - n f_c) \quad (21)$$

3.5 Convergenza della TDF

Come si nota osservando la TDF di una sequenza altro non è che la somma infinita di una serie di potenze complesse in particolare la 20 lo è nella variabile $z = e^{-j\omega}$.
Dunque la 19 e la 20 possono essere riscritte in funzione delle loro somme parziali :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} X_M(\omega) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M x[n] e^{j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\omega n} = X(\omega) \quad (22)$$

inoltre per le predette serie è possibile impostare i seguenti criteri di convergenza :

- in modo uniforme, più stringente, $X(\omega) \leq |X(\omega)| = |\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \leq \infty$
- in modo quadratico medio $X(\omega) \leq |X(\omega)|^2 = |\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n}|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \leq \infty$. Se $x[n]$ rappresenta il campionamento di un segnale significa che la convergenza quadratica media la si ha per segnali ad energia finita.

Giustificazione :

La convergenza di una serie la si studia in funzione dell'errore di approssimazione inteso come differenza della funzione con la sua somma parziale $\lim_{M \rightarrow \infty} |X(\omega) - X_M(\omega)|$. Per i tipi di convergenza indicati si ha che :

- Nella convergenza uniforme per ogni $\omega \in [-\pi, \pi]$, l'intervallo è senza buchi, l'errore deve essere annullarsi : $\lim_{M \rightarrow \infty} |X(\omega) - X_M(\omega)| = 0$; cioè :
se $\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon$ t.c. $\forall M > M_\varepsilon \rightarrow |X(\omega) - X_M(\omega)| < \varepsilon$.
- nella convergenza quadratica invece l'errore è la media quadratica calcolata sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ e ciò lo si ottiene utilizzando l'integrale :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega) - X_M(\omega)|^2 d\omega = 0$$

da notare che che il valore dell'integrale non cambia se in qualche punto la differenza dell'argomento non è nulla e questo spiega perchè questo tipo di convergenza è meno stringente.

3.6 Inversione della TDF di una sequenza

La TDF di una sequenza è una funzione periodica che se normalizzata ha periodo unitario oppure 2π per cui utilizzando la definizione di inversa della TDF abbiamo le seguenti definizioni di sequenze che possono essere come : somma infinita di funzioni esponenziali ognuna di ampiezza infinitesima $X(F)d_F$ e $X(\omega)d_\omega$

$$x[n] = \int_{-0.5}^{0.5} X(F) e^{j2\pi F n} dF \quad (23)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (24)$$

4 Proprietà della TDF per sequenze

- **linearità**

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \leftrightarrow a_1 X_1[f] + a_2 X_2[f] \quad (25)$$

- **Traslazione in frequenza**

$$x[n - n_0] \leftrightarrow e^{j\omega n_0} X(\omega) \quad (26)$$

- **Coniugazione**

$$x[n] e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \quad (27)$$

- **Inversione Temporale**

$$x^c[n] \leftrightarrow X^c(-\omega) x^c[-n] \leftrightarrow X^c(\omega) \text{ se } x[n] \text{ reale} \quad (28)$$

- **Derivata in Frequenza**

$$nx[n] \leftrightarrow j \frac{dX(\omega)}{d\omega} \quad (29)$$

- **Convoluzione Discreta**

$$x[n] \otimes y[n] \leftrightarrow X(\omega) Y(\omega) \quad (30)$$

- **Prodotto nel Tempo**

$$x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)W(\omega - \theta)d\theta \quad (31)$$

- **teorema di Parseval**

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^c[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)Y^c(\omega)d\omega \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (32)$$

5 Download

Download Appunti