

Contents

1	Premessa	2
1.1	Prodotto Interno	2
1.2	Versori	3
1.3	Norma	3
1.4	Distanza tra vettori	3
1.5	Disuguaglianza di Swartz	3
1.6	Angolo tra vettori	4
1.7	Vettori Ortonormali	4
2	Definizione della SDF	4
2.1	SDF per un segnale non periodico	5
3	SDF in forma reale	5
3.1	SDF in forma trigonometrica	6
3.2	SDF in modulo e fase (polare)	6
3.3	Spettro di un segnale	7
4	Proprietà della SDF	8
5	Esempio	9
6	Download	9

1 Premessa

In uno spazio dotato di metrica un qualsiasi segnale ad energia/potenza finita può essere rappresentato come un vettore e dunque l'insieme dei segnali misurabili rappresenta esso stesso uno spazio metrico in cui è possibile definire il concetto di distanza che per le nostre esigenze è definita partendo dal **prodotto interno**, quell'operazione t.c. se applicata a due vettori rende possibile **associare uno scalare reale maggiore o uguale a zero appartenente allo stesso campo sul quale sono definiti i vettori**. Gli spazi cercati sono quelli di **Hilbert** e l'operazione cercata è basata sulla definizione di **prodotto scalare** la quale ha significato anche in caso di risultato nullo: **vettori ortogonali**.

Definita l'operazione di prodotto interno è possibile definire quella di :

- **norma** (13), che ad un vettore associa un numero reale, ottenibile dalla definizione di prodotto interno (5) applicato ad uno stesso vettore il cui valore, nella considerazione che lo spazio in parola è euclideo, rappresenta la lunghezza (distanza dal punto di applicazione). Da notare che questa definizione di norma è solo una delle possibilità, in pratica vi sono norme definibili sulla base di altre operazioni per cui si conclude esistono vari definizioni di norma;
- **distanza** lo spazio di H. è uno spazio di funzioni a quadrato sommabili;

Dalla definizione di angolo tra vettori sulla base del prodotto scalare si definisce la 11 dalla quale si giustifica il significato di prodotto scalare nullo : vettori perpendicolari.

Tra le proprietà del prodotto interno vi è la **disuguaglianza di Swartz** 9 in cui l'uguaglianza vale solo se i vettori sono linearmente indipendenti.

1.1 Prodotto Interno

$$\langle \vec{g}, \vec{w} \rangle = \int |g(t)w^c(t)| dt \quad (1)$$

che nel caso di vettori finiti diventa¹ :

$$\langle \vec{g}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} [w_1 \quad \cdots \quad w_n] \quad (2)$$

¹fonte <http://www.dm.unibo.it/~regonati/al1112/al111216.pdf>

1.2 Versori

Vettori con norma unitaria definiti come nella 3

$$\vec{\phi} = \frac{\vec{g}}{\|\vec{g}\|} \quad (3)$$

1.3 Norma

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} \quad (4)$$

$$\|\vec{g}\| = (\langle \vec{g}, \vec{g} \rangle)^{1/2} = \left(\int |g(t)g^c(t)| dt \right)^{1/2} \quad (5)$$

1.4 Distanza tra vettori

$$d(\vec{g}, \vec{w}) = \left(\int_a^b |g(t) - w(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (6)$$

in cui l'intervallo $[a, b]$ è quello di definizione dei segnali e può essere illimitato. Distanza e norma possono essere messe in relazione tramite :

$$d(\vec{g}, 0) = \left(\int |g(t) - 0|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int |g(t)g^c(t)| dt \right)^{1/2} = |\langle \vec{g}, \vec{g} \rangle|^{1/2} = \|\vec{g}\| \quad (7)$$

1.5 Disuguaglianza di Swartz

$$\begin{aligned} \langle \vec{g}, \vec{w} \rangle &\leq |\langle \vec{g}, \vec{w} \rangle| \leq |\langle \vec{g}, \vec{w} \rangle|^2 \\ &= \int |g(t)w^c(t)|^2 dt = \\ \int |g(t)|^2 |w^c(t)|^2 dt &\leq \int |g(t)|^2 dt \int |w^c(t)|^2 dt = \\ &\quad \|\vec{g}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \end{aligned} \quad (8)$$

da cui

$$\langle \vec{g}, \vec{w} \rangle \leq \|\vec{g}\| \|\vec{w}\| \quad (9)$$

Dalla 9 si ha

$$\frac{\langle \vec{g}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{g}\|^2 \|\vec{w}\|^2} \leq 1 \quad (10)$$

che vale uno solamente quando i vettori sono linearmente indipendenti.

1.6 Angolo tra vettori

Negli spazi euclidei l'angolo tra vettori è definito come

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(\langle \vec{g}, \vec{w} \rangle)}{\|\vec{g}\| \|\vec{w}\|} \quad (11)$$

da cui :

$$\operatorname{Re}(\langle \vec{g}, \vec{w} \rangle) = \cos(\theta) \|\vec{w}\| \|\vec{g}\| = a_w \|\vec{g}\| \quad (12)$$

se \vec{g} è un versore la 12 diventa

$$\operatorname{Re}(\langle \vec{g}, \vec{w} \rangle) = \cos(\theta) \|\vec{w}\| = a_w \quad (13)$$

dove a_w può essere visto come un coefficiente di proiezione.

1.7 Vettori Ortonormali

Versori a due a due perpendicolari

2 Definizione della SDF

Nella 12 il prodotto scalare identifica la proiezione di un generico vettore lungo un versore ma se quest'ultimo fa parte di una base dello spazio vettoriale cui appartiene il vettore che ha generato la proiezione allora la somma di tutte le proiezioni dà come somma il vettore stesso e cioè :

$$\vec{w} = \sum_{w=1}^n \alpha_w \vec{g} \quad (14)$$

che altro non è che la struttura della **Serie di Fourier**.

Se $\vec{g} \in W$ e l'insieme $\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\}$ è una base di W allora la 14 rappresenta :

- il vettore \vec{w} se la base è completa;
- un'approssimazione, di errore $\vec{w}_{err} \perp \vec{w}$, se la base non è completa;

Nella pratica comune una qualsiasi funzione periodica $x(t)$ di periodo T può essere rappresentata nel suo spazio di esistenza da versori complessi del tipo $\frac{1}{\sqrt{T}}e^{j2\pi\frac{k}{T}t}$ per cui il coeficente della SDF diventa :

$$c_k = \langle x(t), e^{j2\pi\frac{k}{T}t} \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi\frac{k}{T}t} dt \quad (15)$$

Per cui la **SDF complessa** diventa :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi\frac{k}{T}t} = \sum_{k=-T/2}^{T/2} G_k e^{j2\pi\frac{k}{T}t} \quad (16)$$

con

$$G_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi\frac{k}{T}t} dt \quad (17)$$

2.1 SDF per un segnale non periodico

VDS Trasformata di Fourier

3 SDF in forma reale

Partendo dall'osservazione che

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} G_k e^{j2\pi\frac{k}{T}t} + G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k e^{j2\pi\frac{k}{T}t} \quad (18)$$

che moltiplicano il coeficente della prima della 18 SDF per -1 si ottiene

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G_{-k} e^{j2\pi\frac{-k}{T}t} + G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k e^{j2\pi\frac{k}{T}t} \quad (19)$$

per cui se $\phi = e^{j2\pi\frac{k}{T}t}$ allora $\phi^c e^{j2\pi\frac{-k}{T}t}$ e $G_{-k} = G_k^c$, dunque

$$x(t) = G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [G_k^c \phi^c + G_k \phi] \quad (20)$$

infine per la proprietà delle funzioni reali che $X(t) = x^c(t)$ posso eguagliare i termini $G_k^c \phi^c = G_k \phi$.

3.1 SDF in forma trigonometrica

Per il passaggio alla forma reale trigonometrica

$$\phi = e^{j2\pi \frac{k}{T}t} = \cos(2\pi \frac{k}{T}t) + j \sin(2\pi \frac{k}{T}t) \quad (21)$$

per cui la 20

$$\begin{aligned} G_k \phi_k + G_k^c \phi_k^c &= G_k [\cos(2\pi \frac{k}{T}t) + j \sin(2\pi \frac{k}{T}t)] + G_k^c [\cos(2\pi \frac{k}{T}t) - j \sin(2\pi \frac{k}{T}t)] = \\ &= \dots = 2 \operatorname{Re}\{G_k\} \cos(2\pi \frac{k}{T}t) + 2 \operatorname{Im}\{G_k\} \sin(2\pi \frac{k}{T}t) = \\ &= \frac{A_k}{2} \cos(2\pi \frac{k}{T}t) - \frac{B_k}{2} \sin(2\pi \frac{k}{T}t) \end{aligned} \quad (22)$$

Per cui in funzione della 5 la SDF diventa un polinomio trigonometrico del tipo

$$x(t) = \frac{A_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} \cos(2\pi \frac{k}{T}t) - \frac{B_k}{2} \sin(2\pi \frac{k}{T}t) \quad (23)$$

in cui

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi \frac{k}{T}t) dt \quad (24)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi \frac{k}{T}t) dt \quad (25)$$

NB : quando $x(t)$ reale pari $B_k = 0$ quando è reale ed dispari $A_k = 0$.

3.2 SDF in modulo e fase (polare)

Per esprimere la SDF in modulo e fase basta osservare che

$$G_k = |G_k| e^{j\theta} \quad (26)$$

per cui la 20 uò essere riscritta come segue

$$\begin{aligned}
x(t) &= G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |G_k| e^{j\theta_k} [e^{j2\pi \frac{k}{T}t} + e^{-j2\pi \frac{k}{T}t}] = \\
&= G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |G_k| 2e^{j\theta_k} \frac{[e^{j2\pi \frac{k}{T}t} + e^{-j2\pi \frac{k}{T}t}]}{2} = \\
&= G_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |G_k| \cos(2\pi \frac{k}{T}t + \theta_k)
\end{aligned} \tag{27}$$

in cui G_0 rappresenta il valor medio del segnale.

3.3 Spettro di un segnale

Al fine di meglio comprendere il concetto di spettro di ampiezza e fase si osservi la seguente figura

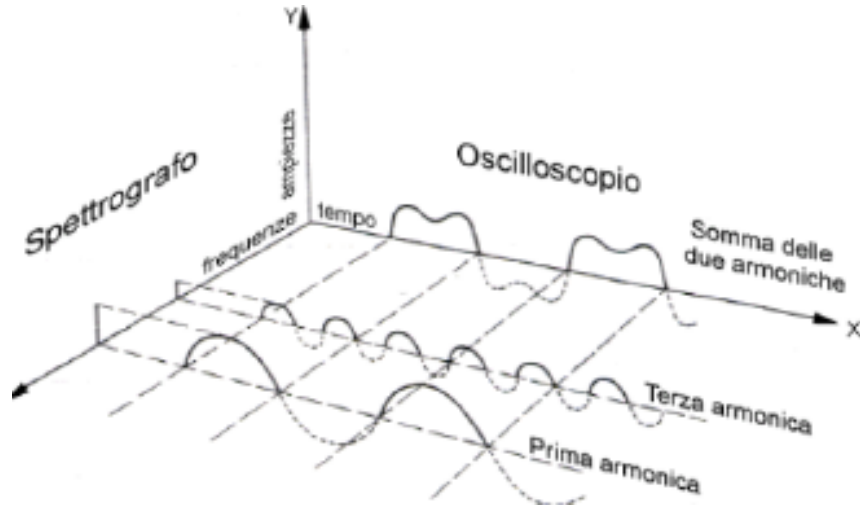


Figure 1: spettro

NB : si definisce fase $\angle G_k = \theta_k$ per cui

$x(t)$	Modulo	Fase	svil. trigonom.
reale	$G_k^c = G_{-k}$	$\angle G_k^c = -\angle G_{-k}$	cos e sin
reale pari	$G_k = G_{-k}$	$\angle G_k^c = 0$	solo cos
reale dispari	$G_k = -G_{-k}$	$\angle G_k^c \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$	solo sin

4 Proprietà della SDF

- **comportamento asintottico di c_k** la SDF di una funzione/segnale (x) converge in ogni punto in cui è derivabile e in quei punti $c_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ con velocità $O(\frac{1}{|k|^{n+1}})$ dove n è l'ordine di differenziabilità che nel caso di funzioni continue coincide con quello di derivabilità k oltre il quale la funzione è continua a tratti. Maggiore è l'ordine di differenziabilità maggiore è la regolarità della funzione e tanto più velocemente c_k andrà a zero.
- **linearità** i coefficienti della SDF di un segnale combinazione lineare di altri segnali sono combinazioni lineari dei coefficienti di ogni singola SDF. In conseguenza anche gli spettri sono combinazione lineare di tutti i singoli spettri.
- **traslazione temporale** i coefficienti della SDF di un segnale traslato nel tempo sono anch'essi traslati nel tempo, cioè : $x(t - t_0) \Rightarrow c_k(t_0) = c_k \frac{1}{\sqrt{(T)}} e^{j2\pi \frac{k}{T} t_0}$.

5 Esempio

$$s(t) = a \cos(2\pi f_0 t)$$

Dal confronto con la forma polare dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale reale periodico si ricavano i coefficienti della Serie di Fourier

$$s(t) = a \cos(2\pi f_0 t) = S_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |S_n| \cos(2\pi f_0 t + \vartheta_n)$$

Da questo confronto si ricava $|S_1| = \frac{a}{2}$, $\vartheta_1 = 0$ e

$$|S_n| = 0, \vartheta_n = 0, \forall n \neq 1$$

Visto che il segnale è reale si ha $S_n^* = S_{-n}$

$$S_1 = \frac{a}{2} e \quad S_{-1} = \frac{a}{2}$$

Figure 2: esempio di calcolo del modulo e fase

6 Download

Download appunti