

## Contents

<b>1</b>	<b>Tipi di Segnali</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>TODO Campionamento periodico uniforme e ricostruzione</b>	<b>3</b>
2.1	Campionamento ideale del segnale . . . . .	3
2.2	<b>TODO</b> Ricostruzione del segnale . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Campionamento per segnali passabanda</b>	<b>5</b>
3.1	Campionamento in fase e quadratura . . . . .	6
3.2	<b>TODO</b> Campionamento e ricostruzione non ideali . . . .	9
<b>4</b>	<b>TDF per sequenze</b>	<b>14</b>
4.1	Definizione della TDF e sua inversa . . . . .	14
4.2	Convergenza . . . . .	15
4.3	Operazioni tra sequenze . . . . .	16
4.4	Proprietà della TDF per sequenze . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Download</b>	<b>18</b>
<b>6</b>	<b>NOTE</b>	<b>18</b>
6.1	Potenza di un segnale sinusoidale . . . . .	18

# 1 Tipi di Segnali

- **segnali a tempo continuo**  $x = f(t)$  con  $t \in R$ ;
- **segnali a tempo discreto**  $x = f[T_n]$  con  $T_n \in Z$ . Esempio :  $x = f(nT)$  con  $n \in Z$  in cui tutti i valori sono distanziati di un valore  $T$ . Un segnale a tempo discreto si dice **deterministico** se il suo valore è noto  $\forall nT$ , mentre se  $nT$  è una variabile aleatoria si dice **processo stocastico od aleatorio**;
- **energia di un segnale a tempo discreto**  $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)$ . Si definisce ad **energia finita** se  $E < \infty$ ;
- **Potenza di un segnale a tempo discreto**  $P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N f(nT)^2$ . Si definisce a **potenza finita** se  $P < \infty$
- **Potenza di un segnale periodico**  $P = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} f(nT)^2$  in cui  $L = nT$  rappresenta il periodo del segnale inteso come valore minimo per il quale risulta verificata la seguente uguaglianza :  $f(nT) = f(nT + LT)$
- **Segnali Passa Banda** segnali con spettro non nullo in un determinato intervallo di frequenze (banda)  $B = (f_2 - f_1)$  con  $f_2 > f_1$ ;

Da notare che un segnale periodico ha energia infinita.

NB: Il teorema del campionamento mette in relazione lo spettro del segnale campionato con quello del segnale da campionare ( analogico ) ma non può essere applicato ad una sequenza ( ad esempio ingresso periodico ) non ottenuta dal campionamento di un segnale analogico, per questo vds la teoria della TDF delle sequenze.

La seguente tabella riepiloga quale TDF utilizzare in funzione del tipo di segnale :

tempo	frequenza	TDF	TDF <sup>-1</sup>	note
TC	FC	$X(F) = \int x(t) e^{-j2\pi ft} dt$	$x(t) = \int X(F) e^{j2\pi ft} dF$	è la TDF classica
TC	FD	$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt$	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$	
TD	FC	$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$	
TD	FD	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}$	$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N} kn}$	

## 2 TODO Campionamento periodico uniforme e ricostruzione

### 2.1 Campionamento ideale del segnale

La seguente teoria è basata sull'astrazione matematica della  $\delta(t)$  che nella realtà è un segnale non realizzabile ed inoltre nessun segnale reale ha uno spettro limitato in banda. Il presente teorema mette in relazione lo spettro del segnale campionato con quello del segnale analogico dal quale è ottenuto.

- **campione** valore del segnale al tempo  $nT$  in cui  $T$  è detto **passo di campionamento**;
- **segnale campionato** insieme dei campioni  $nT$ ;
- **frequenza di campionamento** determina ogni quanto ha luogo una conversione A/D

Sia  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$  il segnale **pettine di Dirac**, allora il segnale campionato si ottiene dalla seguente relazione

$$(1) \quad x_c(t) = p(t)x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)$$

infatti nella considerazione che la  $\delta(t) = 0 \forall t \leq 0$  la sua traslazione  $\delta(t-nT)$  è nulla per ogni  $t \neq nT$  con  $n \in \mathbb{Z}$  allora il prodotto  $p(t)x(t) \neq 0 \forall t = nT$ .

Ma come scegliere il passo di campionamento? Si ricorre alla TDF perchè con questo strumento è possibile studiare la distribuzione in frequenza del segnale di modo da poter scegliere una frequenza di campionamento ( ed indirettamente il passo di campionamento  $T$  ) tale da comprendere tutta la banda o per lo meno la maggior parte di essa.

Calcolo della TDF di  $x_c(t)$  :

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{T}t} \quad (2)$$

con

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt = \frac{1}{T} \quad (3)$$

per cui

$$p(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \quad (4)$$

$$x_c(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \quad da\ cui \quad (5)$$

$$X_c(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T}) = f_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_c)$$

in cui  $f_c$  è detta **frequenza di campionamento** che per il teo. di Nyquist vale  $f_c > 2B$ . Se quest'ultimo teorema non è rispettato ( fenomeno di antialiasing ) allora non è possibile ricostruire il segnale. Da notare che l'ultima relazione indica che un segnale campionato è la somma infinita di TDF del segnale stesso. A quest'ultimo risultato si poteva giungere osservando che  $X_c(f) = X(f) \otimes P(f)$  per cui

$$\begin{aligned} X_c(f) &= X(f) \otimes P(f) = \int X(\theta) P(f - \theta) d\theta \\ &= \int X(\theta) (f_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\theta) \delta(f - \theta - kf_c)) d\theta \\ &= f_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int X(f) \delta(f - \theta - kf_c) d\theta = f_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_c) \end{aligned} \quad (6)$$

## 2.2 TODO Ricostruzione del segnale

La ricostruzione del segnale avviene utilizzando un filtro passabasso e dalla teoria dei sistemi LTI nota la risposta impulsiva il segnale in uscita è ottenuto mediante la convoluzione tra quest'ultima e il segnale in ingresso che nello specifico altro non è che il segnale campionato :  $\tilde{x}(t) = x_c(t) \otimes h_r(t)$ .

Sia la risposta impulsiva del filtro passabasso

$$H_r(f) = \begin{cases} \frac{1}{f_c} & \text{con } |f| < \frac{f_c}{2} \\ 0 & \text{con } |f| > \frac{f_c}{2} \end{cases} \quad (7)$$

$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi f_c t)}{\pi f_c t} \quad (8)$$

allora la ricostruzione del segnale avviene mediante :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= x_c(t) \otimes h_r(t) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right) \otimes h_r(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin \pi f_c (t - nT)}{\pi f_c (t - nT)} \end{aligned} \quad (9)$$

Ad esempio per una risposta impulsiva  $h_r(nT)$  con  $T=1$

Combinando il grafico 1 e l'ultima equazione si nota che :

- $\forall t \leq nT$  il segnale dipende dalla sommatoria di infiniti contributi di  $x(nT)$ ;
- $\forall t = nT \Rightarrow h_r(nT) = 1$  infatti basti ricordarsi del limite notevole  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$  e dunque l'unico contributo dipende dal campione  $x(nt)$ ;
- per ogni  $n \leq 0$   $h_r(nT)$  cioè tra tutte le possibili dunque in questi punti
- per ogni  $t = nT$  l'unico contributo dipende da  $x(nT)$

### 3 Campionamento per segnali passabanda

Un segnale reale dopo il filtraggio ha un residuo all'esterno della banda passante e ciò produce il fenomeno dell'antialiasing in quanto la parte non nulla del segnale produce uno spettro infinito come mostrato di seguito :

come si nota la maggior parte del segnale è compreso nell'intervallo  $[-f_c/2, f_c/2]$  ma una certa potenza è distribuita lungo le code  $[-\infty, f_c/2]$  e  $[-f_c/2, \infty]$  le quali essendo comprese in intervalli semiaperti producono un fenomeno di sovrapposizione quando le si trasla di  $nf_c$  si hanno effetti nell'intervallo  $[-f_c/2, f_c/2]$  come evidenzia l'area grigia del grafico rappresentato in fig 2.

Inoltre per ogni traslazione  $nf_c$  le code del segnale centrato nell'origine hanno effetti nella banda  $[f_c \frac{(2n-1)}{2}, f_c \frac{(2n+1)}{2}]$ .

Per valutare la limitatezza di banda si valuta il rapporto tra l'energia del segnale in banda utile e l'energia della "coda" che per un segnale di tipo :

- **deterministico** vale  $\frac{S}{D} = \frac{\int_0^{f_c/2} |X(f)|^2 df}{\int_{f_c/2}^{\infty} |X(f)|^2 df}$

- **aleatorio** vale  $\frac{S}{D} = \frac{\int_0^{f_c/2} S_{xx}(f) df}{\int_{f_c/2}^{\infty} S_{xx}(f) df}$

Come risulta evidente il rapporto energia di banda / energia di coda dipende dalla scelta della frequenza di campionamento  $f_c$  per cui invertendo il discorso il rapporto può essere utilizzato per il calcolo della  $f_c$  la quale più è minore minore è la complessità del filtro passabanda. In modo pratico per la scelta della  $f_c$  si utilizza un adattamento del criterio di Nyquist di un segnale passa banda (1) :

$$k \frac{f_c}{2} \leq f_1 < f_2 \leq (k+1) \frac{f_c}{2}$$

da cui si ricava  $k$  tenendo conto che contemporaneamente deve essere verificato anche il criterio di Nyquist:  $\min\{f_c : f_c = 2B\}$  cioè bisogna trovare il più piccolo  $k$  t.c.  $\frac{(k+1)}{2} f_2 \leq 2B \leq \frac{k}{2} f_1$ .

Infine si osserva che per ogni  $k$  dispari si ottiene una versione invertita dello spettro.

### 3.1 Campionamento in fase e quadratura

Fino a quando il segnale che contiene l'informazione è inviata direttamente al mezzo trasmissivo nella loro forma originale basta che rispetti il criterio di Nyquist 5 altre volte occorre addattare il segnale al mezzo trasmissivo mediante traslazione, cioè modulando, in funzione dell'informazione da trasmettere, uno dei seguenti parametri di un segnale detto portante : fase; ampiezza; frequenza.

I seguenti passi mostrano come come effettuare la traslazione e come ottenerla in pratica :

#### 1. traslazione

- Sia  $x(t)$  un segnale reale con banda  $B_x = [f_1, f_2]$ ;
- Sia  $s(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$  l'**inviluppo complesso** di  $x(t)$  il cui spettro  $S(f)$  ha banda  $B_S = [-B/2, B/2]$  dove  $A(t)$  e  $\phi(t)$  sono, rispettivamente, ampiezza e fase dell'inviluppo;
- Sia  $c(t) = s(t)e^{j2\pi f_0 t}$  il segnale complesso ottenuto dalla traslazione di  $s(t)$  avente spettro  $C(f - f_0)$  e banda  $B_C = [f_0 - B/2, f_0 + B/2]$ ;

$B/2]$  allora se scegliamo  $f_0 = \frac{f_1+f_2}{2}$  allora  $B_C$  coincide con  $B_x$ ;  
vds [[fig:sgn]

## 2. come ottenere la traslazione

(a) Il segnale reale  $x(t)$  è esprimibile come

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c(t) + c^c(t)}{2} = \\ &= \text{Re}[s(t)e^{j2\pi f_- t}] = \\ &= \text{Re}[A(t)e^{j\phi(t)}e^{j2\pi f_- t}] = \\ &= \text{Re}[A(t)\cos(2\pi f_- t + \phi(t))] \end{aligned} \quad (10)$$

allora la TDF di  $x(t)$  è  $X(f) = \frac{C(f-f_0)+C^c(-f-f_0)}{2}$ ;

(b) Dalla 2.1

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t)\cos(\phi(t))\cos(2\pi f_- t) + A(t)\sin(\phi(t))\sin(2\pi f_- t) = \\ &= s_I(t)\cos(2\pi f_- t) + s_Q(t)\sin(2\pi f_- t) = \\ &= s_I(t)\cos(2\pi f_- t) + s_Q(t)\sin(2\pi f_- t) \end{aligned} \quad (11)$$

in cui  $s_I$  e  $s_Q$  sono segnali reali noti come portanti di fase e quadratura entrambi con spettro non nullo  $[-B/2, B/2]$ ;

(c) Altro modo di vedere la relazione di cui al precedente pto 2.2 è nel modo complesso cioè :  $s(t) = s_I(t) + js_Q(t)$ .

## 3. Implementazione

Per ottenere la traslazione è necessario aggiungere due componenti ortogonali ( $\sin, \cos$ ) vds 3 e 4 con l'unica differenza che la demodulazione complessa si ottiene con un circuito più semplice. Inoltre la traslazione non comporta perdita d'informazione in quanto dopo la demodulazione è possibile ricostruire esattamente le componenti in fase e quadratura. Da notare che la separazione dai segnali ortogonali avviene mediante il passaggio in un filtro PB con banda  $B$ .

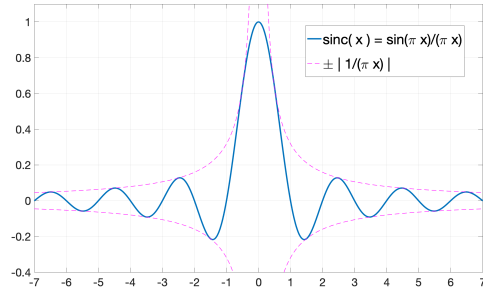


Figure 1: grafico di sinc per  $T=1$

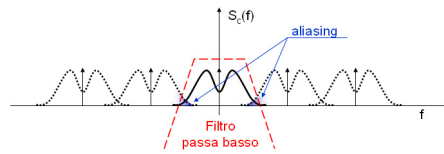


Figure 2: segnale reale

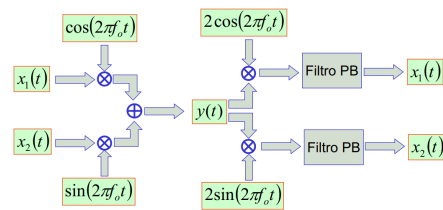


Figure 3: modulazione e demodulazione in fase e quadratura

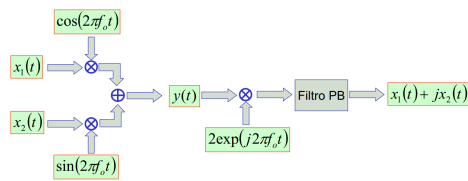


Figure 4: modulazione in fase e quadratura e demodulazione complessa ( circuito più semplice )



1. **campionatura** Un primo metodo consiste nel campionare separatamente le componenti  $s_I(t)$  e  $s_Q(t)$  con una frequenza di campionamento  $f_c$  t.c. coincida con la banda del filtro PB ma questo in modo la campionatura è influenzata da ogni imperfezione di questa ( es. sinusoidi non sfasate perfettamente di  $\frac{\pi}{2}$ , la qualità del filtro che influenza la sua risposta  $H(f)$  ) generando il fenomeno dell'antialiasing.

Al fine di rendere indipendente il campionamento dai parametri costruttivi del filtro PB si usa campionare il direttamente il segnale passa-banda con una  $f_c \geq 2/B$  ( criterio di Nyquist ) in cui B è la banda del filtro PB utilizzato in fase di ricostruzione ed  $f_0$  è la frequenza dei due segnali in quadratura :

$$f_c = \frac{4f_0}{2k+1} \geq 2B \quad (12)$$

Calcolato il valore di k che minimizza la  $f_c$  la 2.1 si ottiene :

$$\begin{aligned} x(nT_c) &= s_I(nT_c)\cos(2\pi f_0 nT_c) + s_Q(nT_c)\sin(2\pi f_0 nT_c) \\ &= s_I(nT_c)\cos(2\pi f_0 n(\frac{2k+1}{4f_0})) + s_Q(nT_c)\sin(2\pi f_0 n(\frac{2k+1}{4f_0})) \\ &= \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} s_I(nT_c) & \text{per } n \text{ pari} \\ (-1)^{\frac{(k+(n-1))}{2}} s_Q(nT_c) & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

rif : trasm. numerica in banda passante

### 3.2 TODO Campionamento e ricostruzione non ideali

Il campionamento reale non può essere effettuato con l'utilizzo della  $\delta(t)$  che è una pura astrazione matematica ma con  $rect(\tau T)$  e il valore campionato altro non è che la media del segnale nella finestra della  $rect$  :

$$x[nT_s] = \int_{nT_s - \frac{\tau}{2}}^{nT_s + \frac{\tau}{2}} x(t) dt = x(t) \otimes \frac{1}{\tau} rect_{\tau}(t)|_{t=nT_s} \quad (14)$$

infine osservando che essendo la *sinc* la TDF della *rect* in fase di ricostruzione si introduce un degrado in quanto

Osservando i grafici se  $\tau \ll T$  l'errore di campionamento diventa trascurabile in quanto la media tende a concidere con il valore puntuale ma per quanto piccolo esiste sempre e può essere modellato come due campionamenti a cascata  $[segnale\ campionato\ reale] = [segnale\ campionato\ ideale] \otimes [segnale\ campionatore\ reale]$  in cui il primo è ottenuto con la  $\delta(t)$  mentre il secondo con  $g(t) = rect(\tau T)$  la cui implementazione matematica diventa :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_c(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)g(t-nT) = \\ &[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) ] \otimes g(t-nT) \Rightarrow \tilde{X}_c(f) = X_c(f)G(f) \end{aligned} \quad (15)$$

La TDF di  $\tilde{x}_c(t)$  può essere vista come la risposta di un filtro LTI in cui la risposta impulsiva vale :  $H(f) = \frac{1}{G(f)} = \frac{X_c(f)}{\tilde{X}_c(f)}$  L'aver associato il significato della TDF di  $\tilde{x}_c(t)$  all'azione di un filtro avente risposta, nell'intervallo  $[-f_c/2, f_c/2]$ , impulsiva  $g(t) = rect(\tau T)$  comprensiva della distorsione apportata ( rumore ) al segnale  $x(T)$  permette di modellare in fase di ricostruzione un filtro in grado di "compensare" il rumore introdotto, la risposta in frequenza di tale filtro è data dalla relazione  $H(F) = \frac{1}{G(f)}$  con  $G(f) = sinc(f)$ .

- Quantizzazione

L'operazione di quantizzazione rende discreto un segnale continuo.

Sia  $Q[.]$  la funzione di quantizzazione che applicata un segnale campionato permette di ottenere il quanto  $\hat{x}(nT) = Q[x(nT)]$  che per poter essere rappresentato da un insieme di valori finito  $[A_1, ..., A_2]$  è necessario un'associazione univoca e ciò la si ottiene confrontando il quanto con un valore di soglia  $s_n$ . Quanto detto è ripilogato nell'immagine seguente:

1. sia  $\Delta = s_{i+1} - s_i$  il passo di quantizzazione;
2. sia  $A$  l'insieme dei livelli di quantizzazione ognuno dei quali vale  $[0, 1]$ ;
3. sia  $D = x_{max} - x_{min}$  la dinamica, cioè l'intervallo massimo ( ampiezza ) che i livelli di quantizzazione devono coprire. Se  $D$  è eccessivamente grande rispetto ai valori da quantizzare allora i livelli di quantizzazione sono insufficienti, mentre se è minore allora si possono ottenere errori di overflow;

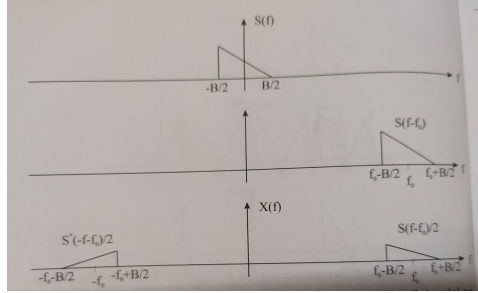


Figure 5: rappresentazione grafica dei pti 1 e 2

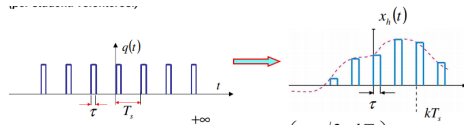


Figure 6: esempio di campionamento

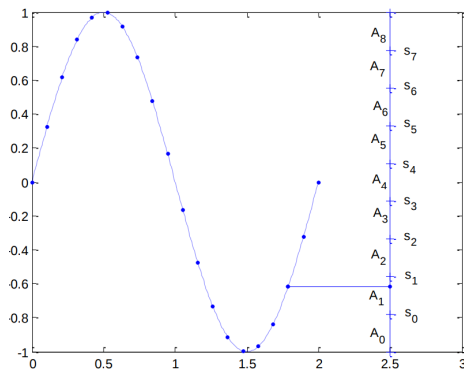


Figure 7: riepilogo quantizzazione

4. sia  
 $[-2^{A-1}\Delta, 0, 2^{A-1}\Delta]$  op  
 $[-(2^{A-1} - \frac{1}{2})\Delta, \dots, -\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}, \dots, (2^{A-1} - \frac{1}{2})\Delta]$   
 due possibili intervalli di rappresentazione, il primo contenente  
 il valore 0, il secondo simmetrico rispetto all'origine;

Per quanto sopra la relazione che lega i seguenti elementi è la seguente  
 $\Delta = \frac{D}{2^A}$ .

- Errore di quantizzazione e misurazione SNR (signal-to-noise-ratio)

La procedura di quantizzazione introduce errori noti come rumore di quantizzazione causando una perdita d'informazione definita come rapporto tra potenza del segnale e potenza dell'errore ( varianza )

$$SNR = \frac{S}{\sigma_e^2} \quad (16)$$

oppure in modo logaritmico

$$SNR_{db} = 10 \log_{10} \frac{S}{\sigma_e^2} \quad (17)$$

in cui  $\sigma^2 = E[(e(nT) - E[e(nT)])^2]$  è la varianza dell'errore in cui

$$E[e(nT)] = \int_a^b ep(e)de \quad (18)$$

Potenza dell'errore :

$$E[e^2(nT)] = \int_a^b e^2 p(e) de \quad (19)$$

Essendo l'errore modellabile secondo le seguenti proprietà :

1. è un processo stazionario  $\Rightarrow$  media e varianza sono costanti;
2. la densità di probabilità è uniforme  $\Rightarrow$  è possibili valutarli;

3.  $e(nT)$  è incorrelato con  $x(nT) \Rightarrow$  al prodotto si può applicare la proprietà associativa  $E[x(nT)e(nT)] = E[x(nT)]E[e(nT)]$ ;
4. i campioni  $e(nT)$  sono tra loro incorrelati  $\Rightarrow$  al prodotto si può applicare la proprietà associativa ;

A seconda del caso di quantizzazione la 17 diventa

1. Caso di campionamento per arrotondamento

$$p(e) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & -\Delta < e \leq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (20)$$

$$E[e(nT)] = \int_{-\Delta}^0 ep_e(e)de = \dots = -\frac{\Delta}{2} \quad (21)$$

$$E[e^2(nT)] = \int_{-\Delta}^0 e^2 p_e(e)de = \dots = -\frac{\Delta^2}{3} \quad (22)$$

$$\sigma^2 = E[(e(nT) - E[e(nT)])^2] = \int_{-\Delta}^0 (e + \frac{\Delta}{2})^2 p_e(e)de = \frac{\Delta^2}{12} \quad (23)$$

Dalla prop. 3

$$E[e(nT)e((n+m)T)] = \begin{cases} E[e^2(nT)] = \frac{\Delta^2}{3} & m = 0 \\ E[e(nT)]E[e((n+m)T)] = \frac{\Delta^2}{4} & m \neq 0 \end{cases} \quad (24)$$

1. Caso di campionamento per troncamento

$$p(e) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & -\frac{\Delta}{2} < e \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (25)$$

$$E[e(nT)] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} ep_e(e)de = 0 \quad (26)$$

$$\sigma^2 = E[e^2(nT)] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 p_e(e) de = \frac{\Delta^2}{12} \quad (27)$$

Dalla prop. 3

$$E[e(nT)e((n+m)T)] = \begin{cases} E[e^2(nT)] = \sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12} & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases} \quad (28)$$

quest'ultima definisce il rumore bianco .

Per quanto sopra  $SNR = \frac{S}{\sigma^2} = \frac{S}{\frac{1}{12}\Delta^2}$  che per le proprietà della definizione della funzione di quantizzazione  $Q[.]$  si che  $SNR = \frac{S}{\frac{1}{12}(\frac{D}{2^A})^2}$  che in scala logaritmica diventa

$$\begin{aligned} SNR_{db} &= 10\log_{10} SNR = 10\log_{10} \left( \frac{S}{\frac{1}{12}(\frac{D}{2^A})^2} \right) \\ &= 10\log_{10} \left( \frac{12S2^{2A}}{D} \right) \\ &= 6.02A + 10\log_{10} \left( \frac{12S}{D^2} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

L'ultima permette di esprimere il valore  $SNR$  solo in funzione del numero dei bit di rappresentazione  $A$  della dinamica di quantizzazione ( ampiezza )  $D$  e potenza del segnale  $S$ .

## 4 TDF per sequenze

### 4.1 Definizione della TDF e sua inversa

Per la 5 il campionamento di un segnale continuo è un segnale continuo ma se il campionamento rappresenta una serie ordinata di impulsi non potendo applicare la covoluzione si trasforma direttamente la 2.1 per cui quest'ultima diventa

$$\begin{aligned}
X_c(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-j2\pi ft} dt \quad (30) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j2\pi f nT}
\end{aligned}$$

Com'era intuibile la TDF è una serie, dunque nel caso di un insieme ordinato di impulsi la TDF è una serie.

NB : cambio di notazione per migliorare la leggibilità  $X(nT) = x[n]$ ;

NB : sostituzione di variabile  $F = fT = \frac{f}{f_c}$  e  $\omega = 2\pi F$  di modo da ottenere funzioni di periodo unitario e di  $2\pi$ ;

La 30 diventa

$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi F n} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\omega n} \quad (31)$$

che altro non è che la SDF in cui  $x[n]$  è il coeficente della serie e si calcola

$$x[n] = \int_{-0.5}^{0.5} X(F) e^{j2\pi F n} d_F x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d_\omega \quad (32)$$

ma la struttura della 32 è l'inversa della TDF.

## 4.2 Convergenza

Stabilire il criterio di convergenza serve a stabilire la classe di funzioni atte a ottenere la sequenza candidata che genera la TDF associata. Più è stringente il criterio di convergenza minori saranno le possibilità di trovare la sequenza candidata.

Sia

$$X_M(\omega) = \sum_{n=-M}^M x[n] e^{-j2\omega n} X(\omega) = \lim_{M \rightarrow \infty} X_M(\omega) \quad (33)$$

allora si ha

- **conv. uniforme**, la più stringente, una serie  $X_M(\omega) \rightarrow X(\omega)$  converge in modo uniforme se  $\forall \epsilon > 0 \exists M_\epsilon$  t.c  $\forall M > M_\epsilon \setminus |X(\omega) - X_M(\omega)| < \epsilon$  e la si ottiene quando :

$$\begin{aligned} |X(\omega)| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \\ &\Rightarrow |X(\omega)| < \infty \quad \omega \in [-\pi, \pi] \end{aligned} \quad (34)$$

per cui

$$\lim_{M \rightarrow \infty} |X(\omega) - X_M(\omega)| = 0, \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi] \quad (35)$$

- **conv. quadratica media**, meno stringente di quella uniforme, definita come

$$\begin{aligned} |X(\omega)|^2 &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\omega n} \right|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \\ &\Rightarrow |X(\omega)|^2 < \infty \quad \omega \in [-\pi, \pi] \end{aligned} \quad (36)$$

per cui

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega) - X_M(\omega)|^2 d\omega = 0 \quad (37)$$

### 4.3 Operazioni tra sequenze

- **Somma**  $w[n] = x[n] + y[n]$
- **Prodotto**  $w[n] = x[n]y[n]$
- **Concoluzione**  $w[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$
- **Traslazione**  $w[n] = x[n - n_0]$
- **Inversione**  $w[n] = x[-n]$
- **Impulso discreto** analogo della  $\delta(t)$



$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{con } n = 0 \\ 0 & \text{con } n \neq 0 \end{cases} \quad (38)$$

per vale il seguente teorema

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \quad (39)$$

- **Gradino unitario**

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (40)$$

altre relazioni utili

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] \quad (41)$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad (42)$$

- **Esponenziale**  $x[n] = a^n$
- **Sequenza sinusoidale**  
 $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\omega_0 n + \phi} + \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 n + \phi}$   
con  $x[n] = x[n+N]$  con  $\omega_0 N = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

#### 4.4 Proprietà della TDF per sequenze

- **linearità**

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \leftrightarrow a_1 X_1[f] + a_2 X_2[f] \quad (43)$$

- **Traslazione in frequenza**

$$x[n - n_0] \leftrightarrow e^{j\omega n_0} X(\omega) \quad (44)$$

- **Coniugazione**

$$x[n] e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \quad (45)$$

- **Inversione Temporale**

$$x^c[n] \leftrightarrow X^c(-\omega)x^c[-n] \leftrightarrow X^c(\omega) \text{ se } x[n] \text{ reale} \quad (46)$$

- **Derivata in Frequenza**

$$nx[n] \leftrightarrow j \frac{dX(\omega)}{d\omega} \quad (47)$$

- **Convoluzione Discreta**

$$x[n] \otimes y[n] \leftrightarrow X(\omega)Y(\omega) \quad (48)$$

- **Prodotto nel Tempo**

$$x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)W(\omega - \theta)d\theta \quad (49)$$

- **teorema di Parseval**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \otimes y^c[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)Y^c\omega d\omega \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (50)$$

## 5 Download

Appunti in PDF

## 6 NOTE

### 6.1 Potenza di un segnale sinusoidale

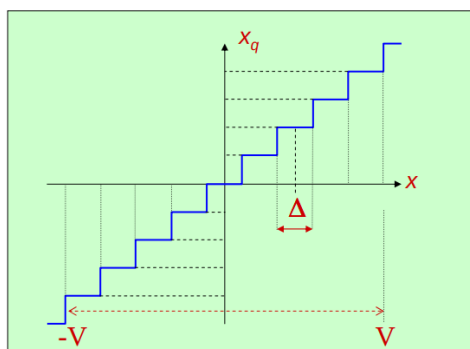


Figure 8: caratteristiche quantizzatore